Matematik i AT (til lærere)

INDHOLD

1. Problemfelter med matematik i AT

Formålet med dette papir er at afdække nogle af problemfelterne samt give gode råd til lærere i forhold til matematik i AT. Ifølge læreplanerne for hhv. matematik og for almen studieforberedelse (se citater nedenfor) ser det ud til at matematik kunne spille en væsentlig rolle i AT. På trods af dette vælger ganske få elever at skrive AT med matematik som det ene fag.

Uddrag af læreplan for matematik A

Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen. Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet.

Afsnit 1.1 fra Mat A læreplan

Eleverne skal kunne demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling.
Eleverne skal kunne demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling.

Afsnit 2.1 fra Mat A læreplan

Uddrag af læreplan for Almen Studieforberedelse

De faglige mål med almen studieforberedelse er, at eleverne skal kunne:
- *opnå viden om et emne ved at kombinere flere forskellige fag og faglige hovedområder*
- *anvende forskellige metoder til at belyse et komplekst problem*
- *forstå enkeltfaglig viden som bidrag til en sammenhængende verdensforståelse*
- *vurdere, hvorledes et givet emne indgår i større historiske og/eller nutidige sammenhænge*
- *vurdere forskellige fags og faglige metoders muligheder og begrænsninger*
- *anvende indsigt i elementær videnskabsteori og videnskabelige ræsonnementer til at formulere og reflektere over problemstillinger af enkeltfaglig, flerfaglig og fællesfaglig karakter.*

Afsnit 2.1 fra AT læreplan

Relevansparadokset[1] kan være en af forklaringerne på at få elever vælger matematik. Eleverne ved godt, at matematik er et vigtigt fag og at det anvendes mange steder, men det kan være svært at gennemskue præcis hvor og hvordan, fordi matematikkens anvendelser ofte foregår på et usynligt plan. Samtidig opfatter mange elever ikke matematikkundskaber som personligt nyttige i forhold til videre liv og karriere. Kort beskrevet går relevansparadokset altså ud på at matematik på den ene side opfattes som relevant for samfundets virksomhed (*objektiv relevans*) og på den anden side som irrelevant for matematikundervisningens modtageres fremtidige liv (*subjektiv irrelevans*). Relevansparadoks kommer ifølge KOM-rapporten også til udtryk på skoleniveau på den måde, at der mange steder er problemer med at bringe matematik i spil i tværfaglige sammenhænge. Ofte har andre faglærere (og nogle matematiklærere) svært ved at se hvad matematik kan bidrage med i konkrete tværfaglige sammenhænge, selvom de ved at matematik har mange anvendelser.

Der kan også peges på det problem at elever (og måske også lærere?) har lettere ved at se de naturvidenskabelige fag i tværfaglige sammenhænge og da der kun må vælges ét fag fra det naturvidenskabelige hovedområde (som matematik hører under i AT-sammenhæng) vælges især fysik på bekostning af matematik.

[1] Se f.eks. KOM-rapporten (Niss 2002).

Et tredje problem er at selvom der praktiseres mange gode tværfaglige matematikholdige samarbejder, så handler AT i høj grad også om hvilken metode de indgående fag anvender i forløbet. Dette har matematik ikke tradition for at sætte så mange ord på i matematikundervisningen og det er da også et ganske abstrakt felt for mange lærere og især for elever. Hvis eleverne på egen hånd skal kunne beskrive matematikkens metode til AT-eksamen kræver det, at de har øvet sig på det i de forudgående AT-forløb eller i den daglige matematikundervisning.

Vi anbefaler derfor at, hvis vi vil have flere elever til at vælge matematik som det ene fag til AT-eksamen, så må vi:

- udvikle og gennemføre flere gode AT-forløb, hvor matematikkens anvendelser i samfundet gøres meget synlige og elevernes følelse af subjektiv irrelevans mindskes.
- sætte større fokus på matematikkens metode og videnskabsteori i den daglige matematikundervisning og i de AT-forløb matematik deltager i.

I denne folder vil vi især se på den sidste pind. Se afsnit 4 og 5.

2. De enkelte AT-forløb

I AT læreplanen står følgende om de enkelte AT-forløb:

De enkelte emner

Almen studieforberedelse består af emner, hvis belysning kræver flere fag og faglige hovedområder, og som samtidig er med til at kaste lys over fundamentale idémæssige og videnskabelige spørgsmål. Stoffet rummer problemstillinger fra nutid og fortid og omfatter konkrete værker, personer, begivenheder, eksperimenter, genstande o.l. knyttet til de pågældende problemstillinger.

Fokus i det enkelte emneforløb skal være klart formuleret og skal give anledning til både indholdsmæssige og metodiske problemstillinger. Emneforløbet skal have en sådan fylde, at den enkelte elev naturligt bringes i en situation, hvor der skal foretages valg, afgrænsning og præcisering i arbejdet med det produkt, som det pågældende forløb skal resultere i.

I arbejdet med hvert emne skal flere fag være aktive. Emnerne skal inddrage stof fra fagene og støtte fagenes mål og den faglige progression.

Afsnit 2.2 fra AT læreplan

De emner der vælges til AT-forløb skal altså inddrage stof fra de fag, der indgår i forløbet på en måde, der støtter de enkelte fags mål. Stoffet kan både være kernestof og supplerende stof.

Når der vælges emner til AT-forløb og til AT-eksamen er det ligesom i meget andet tværfagligt samarbejde vigtigt, at der tænkes ”sag frem for fag”. Det er sagen, der står i centrum, og fagene må finde veje til at udforske og belyse sagen. Dog bør der vælges relevante og interessante sager, der reelt kan belyses af flere fag.

Alle hovedområder behøver ikke indgå i hvert AT-forløb (ofte kan det tværtimod være en fordel at begrænse antallet af fag). Dog bør så mange fag og hovedområder som muligt komme på banen over gymnasiets treårige periode. De enkelte AT-forløb skal tilsammen dække de faglige mål for AT.

Da matematik ikke deler metode med de øvrige naturvidenskabelige fag bør faget indgå i så mange AT-forløb, at eleverne oplever forskellige dele af fagets natur samt flere af fagets forskellige metoder. Alternativt kan det blive nødvendigt at fokusere på og tydeliggøre metodemæssige aspekter af faget i den særfaglige matematikundervisning[2].

Se evt. Matematiklærerforeningens rapport "Matematik i AT" fra 2007 for eksempler på AT-forløb med matematik: http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/at/mat-i-AT.doc

3. Metoder i matematik og matematikkens videnskabsteori

Elever, der har skrevet AT-synopsis med matematik til AT-eksamen 2009, fortæller at de manglede adgang til skriftligt materiale om matematikkens metode på trods af de havde deltaget i flere AT-forløb med matematik. Det er derfor ikke tilstrækkelig forberedelse til AT-eksamen at deltage i AT-forløb hvor matematik indgår, der skal også gøres en indsats for at eleverne får indsigt i hvilke matematiske metoder der anvendes og hvor matematik kan placeres videnskabsteoretisk. Dette kan med fordel formuleres kort og præcist til eleverne, så de får et værktøj de kan bruge i både undervisningen og til AT-eksamen.

Vi vil her give et bud på et sådan metodepapir til elever. Det er klart at hvis matematikkens metode og videnskabsteori skal formuleres kort og klart for elever, så vil der være mange aspekter, der ikke kommer med. Papiret kan derfor ikke stå alene, men bør uddybes og forklares efterhånden, som de forskellige dele belyses. I litteraturlisten findes materiale, der kan uddybe de forskellige aspekter af metodepapiret. I folderen "Matematik i AT (til elever)" findes samme version af metodepapiret dog uden referencer. Referencerne i fodnoterne er altså fortrinsvist tiltænkt lærerne. En tilhørende progressionsplan følger i afsnit 4. Der kan selvfølgelig ændres i nedenstående metodepapir og progressionsplan, så det passer bedre til de enkelte skoler.

Metodepapir[3]

Matematik er en aksiomatisk-deduktiv videnskab. I matematik søger man ud fra nogle grundlæggende antagelser, de såkaldte aksiomer, gennem logisk bevisførelse (deduktion) at få indsigt i tallenes egenskaber, geometriske figurer og andre abstrakte strukturer. Matematik er således ikke et naturvidenskabeligt fag på linje med fysik, biologi, kemi og naturgeografi.

Når man ser på matematikkens **metoder**, kan man skelne mellem **skabelsen** af matematisk viden og **anvendelsen** af matematisk viden.

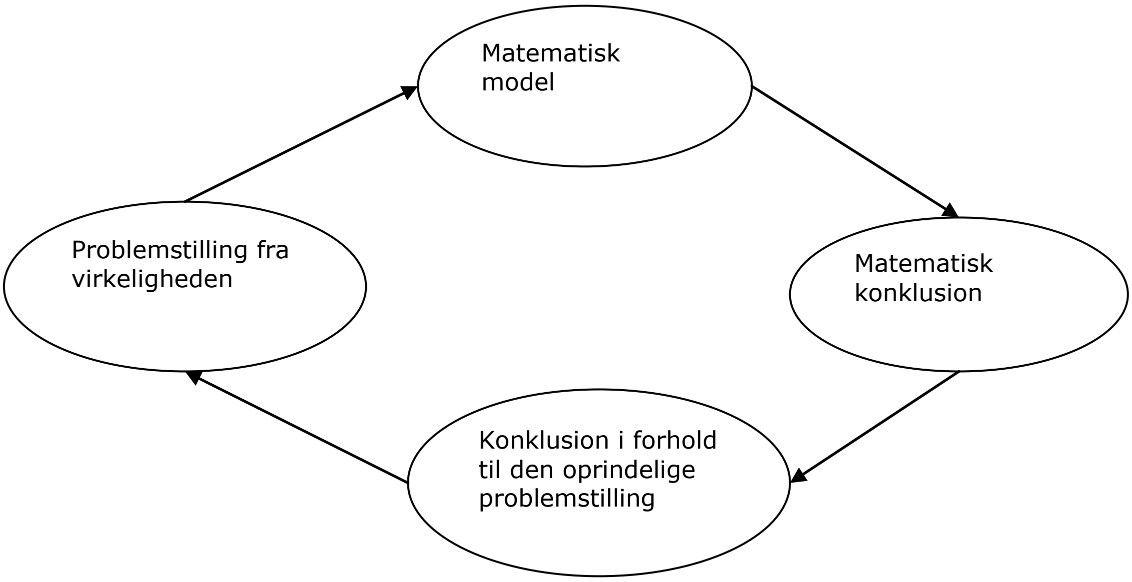
Når man **skaber** ny matematisk viden, anvender man ofte en eksperimenterende (induktiv) metode. Matematikeren prøver sig frem (på baggrund af den viden, erfaring, intuition mv. han/hun har) og kommer frem til formodninger om sammenhænge, strukturer og relationer inden for matematikken. Hvis en formodning viser sig sandsynlig, forsøges den bevist på baggrund af det gældende aksiomatiske system og andre allerede beviste sætninger. Først når formodningen er deduktivt bevist, accepteres den som en gyldig sætning. Bemærk at der her principielt er et strengere krav til gyldighed, end der er i naturvidenskab, hvor en hypotese accepteres, hvis den er afprøvet (efter naturvidenskabens standarder) tilstrækkelig mange gange[4].

[2] Se evt. Matematiklærerforeningens rapport "Matematik i AT" fra 2007 for eksempler på AT-forløb med matematik.

[3] I "Matematik i AT – elever" findes en version en version af metodepapiret, som elever kan bruge.

[4] I skabelsen af ny matematisk viden kan man yderligere skelne mellem opdagelsen af ny matematik og bekræftelsen af ny matematik. I opdagelsen arbejder matematikeren med flere metoder såsom tankeeksperimenter, induktion, observationer af den fysiske virkelighed mv. I bekræftelsen arbejdes der deduktivt. De to kontekster vil dog ikke være skarpt adskilt da valget af deduktivt system i praksis er betinget af, hvilke matematiske sandheder, vi

I gymnasieundervisningen vil man meget sjældent skabe nye matematiske teorier og metoder, men i stedet forsøge at **anvende** kendte teorier og redskaber på forskellige problemer. Når man anvender matematik til at løse problemer fra virkeligheden, så anvender man **matematisk modellering**[5]. Matematisk modellering kan beskrives ud fra en model som nedenfor[6]:



Når man gør brug af matematisk modellering, tager man udgangspunkt i et problem fra virkeligheden. Herefter foregår en cyklisk proces, hvor man først afgrænser og ordner det problem, der skal skabes en model af. Man "oversætter" så at sige problemet til et område af matematikken. Dernæst skal man behandle de matematiske problemer, den opståede model giver anledning til (måske skal man løse ligninger eller analysere funktioner). Her kan man vælge mellem en række matematiske **metoder**, der kan bringe en frem til en matematisk konklusion.

Disse metoder kan opdeles i tre kategorier:

1) **Syntetiske metoder** (hvor man f.eks. konstruerer og måler på geometriske figurer, evt. i geometriprogram, eller undersøger en funktion ved at se på dens graf)
2) **Formelle metoder** (hvor man løser ligninger og omskriver formeludtryk, foretager differentiation osv.)
3) **Numeriske metoder** (hvor man bruger grafiske "tilnærmede" løsninger fra et computerprogram eller en lommeregner, f.eks. når man skal finde en funktions nulpunkter)

Til sidst bedømmer man modellens holdbarhed i forhold til modellens matematiske egenskaber og i forhold til den situation, modellen omhandler (man "validerer" den). Modellen

---

opfatter som sande og nyttige. Der findes en del materiale, der giver forskellige vinkler på dette, se f.eks. Lützen, J. (2005), Johansen, M. (2006) og (2008) og Lakatos, I. (1976).

[5] Vi opfatter ikke matematisk modellering som en metode, men nærmere en kompetence (noget man skal have lært). Se evt. KOM-rapporten (Niss 2002) for en uddybende beskrivelse af denne matematiske kompetence.

[6] Matematisk modellering beskrives i flere lærebøger, f.eks.: Jensen, T., Jessen, C. og Nielsen, M. (2006) s. 148-169, Dejgaard, J. og Michelsen, C. (2001) og Clausen, F., Schomaker, G. og Tolnø, J. (2007) s. 80-117.

analyseres kritisk både i forhold til anvendelighed og i forhold til alternative modeller, og processen startes eventuelt forfra.

Matematisk modellering anvendes som nævnt hver gang matematikkens anvendes uden for dens eget område. Dette vil oftest være tilfældet i AT-sammenhæng.

4. Progression for metode og videnskabsteori

En god forberedelse frem mod en AT-eksamen med matematik indeholder dels et kendskab til en bred vifte af metoder og dels i et indblik i matematikkens videnskabsteori. Eleverne forbereder sig både gennem de matematikholdige AT-projekter de deltager i, almindelige tværfaglige forløb samt den enkeltfaglige matematikundervisning.

For at sikre, at alle elever forberedes tilstrækkeligt til at skrive AT-synopsis med matematik opfordres faggruppen på hver skole til udarbejde en progressionsplan, der inddrager matematikkens metoder og matematikkens videnskabsteori. Da det er faglæreren, der underviser i fagets metode og videnskabsteori, må det være faglærerens ansvar at progressionsplanen følges gennem dels de AT-forløb holdet deltager og dels den daglige matematikundervisning.

Herunder giver vi et bud på hvordan en progressionsplan kunne se ud. I fodnoterne henvises til relevant materiale til enten elever eller lærere (der gives kun referencer til materiale om metode eller videnskabsteori og altså til de mere matematikfaglige dele af de foreslåede forløb). I progressionsplanen indgår hvert år to forløb, et med fokus på skabelsens kontekst og et med fokus på anvendelsens kontekst.

I skabelsens kontekst er det ikke målet at eleverne skal opfinde ny matematik, men at de får indsigt i hvilke metoder, der anvendes når ny viden skabes, herunder både opdagelse og bekræftelse af ny viden. Selvom eleverne ikke selv finder på ”ny” matematik kan de sagtens på induktiv vis komme frem til formodninger som er nye for dem selv og som ikke umiddelbart kan læses i deres grundbog.

I anvendelsens kontekst er matematisk modellering helt central og progressionsplanen indeholder derfor et forløb inden for matematisk modellering på alle tre år. I disse tre forløb bør eleverne stifte bekendtskab med alle tre metoder, nemlig syntetiske, formelle og numeriske metoder. Har eleverne kun matematik på B- eller C-niveau kan de selvsagt ikke nå at arbejde med alle disse metoder lige dybdegående.

Progressionsplan for matematikkens metode og videnskabsteori

Første år med matematik

- Et forløb hvor fokus er på at få indsigt i hvad der menes med hhv. **induktiv og deduktiv metode** samt hvilke fag, der bruger disse metoder. Eleverne skal præsenteres for matematik som en aksiomatisk-deduktiv videnskab, herunder brugen af definitioner, aksiomer, sætninger og beviser i matematikkens opbygning. Forløbet kan tilrettelægges sådan at eleverne arbejder både induktivt og deduktivt og derved selv oplever forskellen. Forløbet kan med fordel foregå i samspil med et naturvidenskabeligt fag eller NV for at illustrere forskellen mellem matematik og naturvidenskab. Eleverne vil derved opleve at matematik (ved første øjekast) kan betragtes som mere sikker viden end i empiriske videnskaber, hvor en induktiv bekræftelse er tilstrækkelig.

- Et forløb med fokus på **matematisk modellering**[7]. I forløbet bør eleverne se mulighederne og begrænsningerne i anvendelsen af matematik til besvarelse af problemer uden for matematikken. Et sådan forløb vil naturligt indgå i den særfaglige matematikundervisning (da det er en del af fagets læreplan), men matematisk modellering kan med fordel også anvendes i AT-sammenhæng. De matematiske modeller, der kan anvendes i 1g er bl.a. regressionsmodeller, vækstmodeller og geometriske modeller. Der kan vælges syntetiske metoder (f.eks. geometriske konstruktioner), formelle metoder (f.eks. brug af funktionsudtryk til fremskrivninger eller formler fra geometri) eller numeriske metoder (f.eks. grafisk aflæsning) i behandlingen af de matematiske problemer den valgte matematiske model giver anledning til.

Andet år med matematik

- Et forløb om forholdet mellem **matematikken og naturen**. Det kunne være et AT-forløb med dansk om f.eks. Dan Browns "Da Vinci Mysteriet" eller med billedkunst om det gyldne snit og fibonaccitallene. I forløbet kan eleverne opnå indsigt i det umiddelbart overraskende at abstrakt og unyttig matematik, udviklet inden i matematikkens eget univers, viser sig at kunne beskrive fænomener i naturen og kunsten. Det kunne også være et enkeltfagligt forløb om geometri, hvor eleverne ser på geometri som hhv. en beskrivelse af den fysiske virkelighed og geometri som en abstrakt matematisk teori helt løsrevet fra virkeligheden. Man kan eventuelt komme ind på at det aksiomsystem man vælger at basere sin geometri på er valgt sådan at det passer med den observerede virkelighed (Euklids accept af parallelpostulatet er et eksempel på dette)[8]. Forløbet kan vælges at gennemføres i 1g.

- Et forløb med fokus på **bevisets rolle** i matematik, herunder også forskellige bevisteknikker[9]. Matematiske beviser spiller en central rolle i opfattelsen af matematikken som aksiomatisk-deduktiv og opfattelsen af matematik som en endegyldig sandhed (som eleverne præsenteres for i progressionsplanens første forløb). Denne opfattelse bør i dette forløb nuanceres. Det kan f.eks. gøres ved at se på Lakatos' beskrivelse af matematisk praksis, når ny matematik opfindes og bekræftes[10] (herunder brugen af vage begreber og grunden til at vi forsøger at give utvetydige definitioner i matematik). Forløbet kan gribes an gennem flere forskellige temaer, f.eks. Euklids "Elementer", historien om Fermats sidste sætning, Eulers polyedersætning eller computerbeviser (er de lige så gyldige som traditionelle

---

[7] Se beskrivelse af matematisk modellering i metodepapiret. Modelleringskompetencen er beskrevet i Niss, M. & Jensen, T. H., (2002). Matematisk modellering er også beskrevet i flere lærebøger, f.eks.: Jensen, T., Jessen, C. og Nielsen, M, (2006) s. 148-169, Dejgaard, J. og Michelsen, C, (2001) og Clausen, F., Schomaker, G. og Tolnø, J., (2007) s. 80-117

[8] Lützen, J. (2005), Johansen, M. (2006) og (2008) og Lakatos, I. (1976).

[9] Bevisteknikker er beskrevet I flere af gymnasiets lærebøger, se f.eks. Carstensen, Fransen, Studsgaard (2005) s. 316-333, Carstensen og Frandsen (1989) kap. 12 eller Clausen, Schomaker og Tolnø (2007) s. 152-183.

[10] Lakatos, I. (1976).

beviser)[11]. Forløbet kan være enkeltfagligt eller det kan tænkes ind i et forløb om argumentation med f.eks. dansk.

- Et forløb med fokus på **matematisk modellering**. I forløbet bør eleverne igen se på mulighederne og begrænsningerne ved at anvende matematik til at besvare problemer uden for matematikken. I 2g kan mere omfattende modeller anvendes. Som AT-forløb kunne matematik samarbejde med samfundsfag om økonomiske modeller og optimering eller statistiske modeller. Det kunne også være et samarbejde med naturvidenskab, hvor differentialregning og integralregning kunne komme i spil. Der kan i behandlingen af de matematiske modeller vælges at arbejde med syntetiske, formelle eller numeriske metoder.

Tredje år med matematik

- Et forløb om **matematikkens grundlag**. I dette forløb diskuteres usikkerheden ved den viden, der opnås i matematik. Dette gøres ved at behandle matematikkens grundlag, herunder grundlagskrisen og en omtale af Gödels ufuldstændighedssætninger[12]. Man kan i forløbet sætte fokus på at aksiomsystemer udvælges på en måde så de i praksis viser sig i stand til at bevise observerede eller intuitivt indsete sandheder. Omverdenen, menneskelig praksis og kulturelle strømninger spiller altså ind selvom vi beskæftiger os med matematikkens mest fundamentale byggesten. Forløbet kan indgå i et AT-forløb, hvor begreber som sandhed og vished diskuteres set fra flere fags perspektiv. Det kunne være et AT-forløb med dansk/historie om perioden omkring 1900-tallet.

- Et forløb med fokus på **matematisk modellering**. I 3g er der mange muligheder for at anvende matematik til modellering af problemer, der ligger uden for matematikken. Især kan differentialligninger anvendes i behandling af økonomiske modeller, priselasticitet, epidemimodeller, fiskerimodeller, trafikmodeller mv. Det kan dog i praksis være svært at gennemføre et tværfagligt forløb eller et AT-forløb af denne type, da ganske få studieretninger har hele hold i 3g med både matematik og samfundsfag eller et naturvidenskabeligt fag. Som enkeltfagligt forløb kan man dog stadig tage udgangspunkt i problemstillinger fra andre fag og behandle disse ved brug af matematik.

5. Arbejdsformer

Projektarbejde og åbne problemstillinger synes helt oplagte i AT-forløb. Man bør dog i et AT-samarbejde være klar over at arbejde med matematik som oftest kræver lidt strammere styring end der kræves i andre fag. Elever skal typisk have meget hjælp til at finde litteratur og til at læse matematikholdige tekster, herunder især beviser. Andre dele af matematikken kan elever arbejde med mere selvstændigt. Dette gælder både i de almindelige AT-forløb og i arbejdet med den endelige AT-eksamen.

[11] DSB's UD&SE (juli 2007), Næs, F. og Danelund, L. (2007), Johansen, M. (2006) og Davis, P. og Hersh, R, (1981).

[12] Davis, P. og Hersh, R (1981), Johansen, M. (2008), DSB's UD&SE (september 2007), Hersh, R. (1979), Snapper, E. (1979), DSB's UD&SE (august 2007) og Madsen, S. (1992).

6. Afsluttende AT-eksamen

Ved den afsluttende AT-eksamen er eleverne principielt på egen hånd. De skal dog have vejledning til at finde en god sag, der kan belyses af to fag, afgrænse og fokusere sagen, skrive en klar og præcis opgaveformulering, strukturere synopsen mv. Læs evt. i dokumentet ”Matematik i AT - elever” for gode råd til elever i forbindelse med AT-eksamen.