

---

# Materiale til lærere og elever

---

## INDHOLD

<b>1. MATEMATISK MODELLERING</b>	<b>2</b>
<b>2. BEVISER OG BEVISTEKNIKKER I MATEMATIK</b>	<b>3</b>
<b>3. MATEMATIKKENS VÆSEN</b>	<b>4</b>
<b>4. MATEMATIKKENS GRUNDLAG</b>	<b>5</b>
<b>5. EKSEMPLER PÅ AT-FORLØB MED MATEMATIK</b>	<b>6</b>

## 1. Matematisk modellering

---

Blomhøj, M. og Frisdal, K., (1985), "Modelsnak – differentiaalligningsmodeller", FAG

*Den indeholder afsnit om matematiske modeller, fra problem til model til løsning, analytisk løsning, numerisk løsning, autentiske modeller, modevaluering. Kan bruges som materiale til elever.*

Heefelt, M. (1990), "Dynamiske modeller", Gyldendal 1990

*Indeholder udmærkede afsnit om forholdet mellem virkelighed og model, samt kapitler om økologi og lineære differentiaalligninger af første orden. Kan bruges som materiale til elever.*

<http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/402.pdf>

*Den indeholder didaktiske overvejelser vedrørende udvikling, gennemførelse og evaluering af et kursusforløb i matematisk modellering på den Naturvidenskabelige Basisuddannelse på RUC. Det er målet med kurset at de studerende skal udvikle kompetencer til at kunne opstille, anvende, analysere og kritisere matematiske modeller. Pædagogisk set er kurset tilrettelagt som en række små projektføløb, hvor de studerende arbejder med matematiske modeller i en række eksemplariske sammenhænge. Til undervisningen er udgivet kursusmateriale der kan rekvireres på RUC's notecentral. Kan bruges af lærere som inspiration til AT-forløb.*

<http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/299.pdf>

*Projekt skrevet på matematikoverbygningsuddannelsen. Rummer en analyse af den makroøkonomiske model ADAM ud fra en matematisk synsvinkel. Det hensigtsmæssige i at anvende den slags modeller i den politiske beslutningsproces vurderes. Rummer desuden afsnit med generelle overvejelser over matematiske modellers opbygning og natur. Kan bruges som materiale til lærere.*

<http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/410.pdf>

*Projekterne er skrevet på den Naturvidenskabelige Basisuddannelse. De gør begge brug af forskellige SIR-modeller til undersøgelse af influenzaepidemier, f.eks. opstilling af vaccinstrategier. Kan bruges som materiale til lærere.*

**Matematisk modellering er også beskrevet i flere af gymnasiets lærebøger, se f.eks.:**

Clausen, F., Schomaker, G. og Tolnø, J., (2007) "Gyldendals Gymnasiematematik Grundbog B2", Nordisk Forlag A/S, København, kap 3 s. 80-117.

*I kapitlet beskrives matematisk modellering og en række eksempler gennemgås.*

Dejgaard, J. og Michelsen, C., (2001), "Trafikmodeller", Matematiklærerforeningen.

*I bogen beskrives først hvad matematisk modellering er og dernæst gives en række eksempler på modellering af forskellige situationer i trafikken.*

Hjersing, N., Jensen, P. og Jørgensen, B., (2004), "Modeller i Derive: Differentiaalligninger og modelbygning", Matematiklærerforeningen.

*I bogen beskrives 9 konkrete modelleringsprojekter, herunder fiskerimodeller*

Jensen, T., Jessen, C. og Nielsen, M., (2006), "Matema10k – Matematik for gymnasiet B-niveau", Frydenlund, København, s. 148-169

*I kapitlet beskrives hvad matematisk modellering er og en række eksempler gennemgås.*

## 2. Beviser og bevistechnikker i matematik

---

Artikel fra DSB's UD&SE (juli 2007):

<http://www.dsb.dk/cs/BlobServer?blobtable=Download&blobheader=application%2Fpdf&blobcol=urldownload&blobkey=id&blobwhere=1148305124324&ssbinary=true&filename=file.pdf>

*Letforståelig artikel om Fermats sidste sætning. Artiklen gengiver nogle af historiens mange bidrag til et bevis for sætningen og ikke mindst Andrew Wiles' endelige bevis. Kan bruges som materiale til elever.*

Davis, P. og Hersh, R. (1981), "The Mathematical Experience", Boston: Birkhäuser.

*Grundig beskrivelse af hvad matematik er. I kap 7 beskrives forskellige retninger inden for matematikken, herunder platonisme, formalisme og konstruktivisme. Matematikeres forgæves søgen efter et sikkert grundlag for matematikken beskrives og Lakatos' fallibilistiske tilgang forklares. Computerbeviser og firfarvesætningen beskrives i kap 8. God bog om matematikkens filosofi, men kun til lærere.*

Næs, F. og Danelund, L., (2007), "Matematik i alle regnbuens farver", bilag 1 til et oplæg om et studieretningsprojekt i matematik og filosofi:

[http://www.math.ku.dk/formidling/studieretningsprojekter/filer/Mat\\_filosofi/Matematiske\\_beviser/Matematiske\\_beviser.doc](http://www.math.ku.dk/formidling/studieretningsprojekter/filer/Mat_filosofi/Matematiske_beviser/Matematiske_beviser.doc)

*Artikel om firfarvesætningen og jagten efter et bevis for denne. I artiklen berøres modeksemples status i matematik og brugen af computere til bevis af sætninger. Kan bruges som materiale til elever.*

Lakatos, I., (1976), "Proofs and Refutations", Cambridge: Cambridge University Press, London/New York

Eller uddrag på dansk: <http://www.henrikkragh.dk/hom/lmfk2002/lakatos2002.larger.pdf>  
*Arbejdet med beviset for Eulers polyedersætning sætningen udspiller sig som en dialog mellem elever og lærer. Elever og lærer fremsætter beviser og gendrivelses og Lakatos forsøger hermed at introducere fallibilisme og illustrere bevisers dialektiske karakter. Uddrag af den danske version kan bruges som materiale til elever.*

Johansen, M., (2006), "Helt Sikker", artikel i Weekendavisen 11.08.2006

*Letforståelig artikel om matematikkens tvivlsomme sikkerhed og bevisers rolle i matematikken. Berører Fermats sidste sætning, firfarvesætningen samt brugen af computere i beviser. Kan bruges som materiale til elever.*

### **Bevistechnikker er beskrevet i flere af gymnasiets lærebøger, se f.eks.:**

Carstensen og Frandsen, (1989), "Matematik 2 for obligatorisk niveau", Systime.

*Kap. 12 "Om matematik" omhandler sætninger, direkte & indirekte bevis, bevis v. kontraposition, modbevis, induktionsbevis samt det induktive og det deduktive princip.*

Carstensen, Fransen, Studsgaard, (2005), "Mat B1", Systime, s.316- 333

*Introduktion til Euklids Elementer og forskellige beviser for Pythagoras' sætning. Udmærket og kan sagtens bruges til AT sammen med enten oldtidskundskab eller historie.*

Clausen, Schomaker og Tolnø, (2007), "Gyldendals Gymnasimatematik Grundbog B1", Nordisk Forlag A/S, København, s. 152-183

*Nogle geometribeviser gennemgås detaljeret og forskellige bevistyper demonstreres. Endvidere omtales beviset for Fermats sidste sætning. Udmærket til at vise forskellige bevistechnikker inden for matematikken.*

Glunk, C., m.fl., (2006), "Q.E.D. Platon & Euklid tegner og fortæller", Gyldendal.

*Argumentation hos Euklid og Platon og matematikkens forhold til den græske filosofi.*

### 3. Matematikkens væsen

---

Chalmers, A., (2003), "Hvad er videnskab", Gyldendal

*I bogen beskrives bla. Lakatos generelle videnskabsfilosofi, Poppers falsifikationisme og Kuhns paradigmatteori. Den generel videnskabsteori beskrives og der er ikke særligt fokus på matematikkens videnskabsteori. Kan bruges som baggrundslitteratur for lærere.*

Davis, P. og Hersh, R., (1981), "The Mathematical Experience", Boston: Birkhäuser.

*Grundig beskrivelse af hvad matematik er. I kap 7 beskrives forskellige retninger inden for matematikken, herunder platonisme, formalisme og konstruktivisme. Matematikerens forgæves søgen efter et sikkert grundlag for matematikken beskrives og Lakatos' fallibilistiske tilgang forklares. Computerbeviser og firfarvesætningen beskrives i kap 8. God bog om matematikkens filosofi, men kun til lærere.*

Johansen, M., (2006), Matematik – kvadratisk, praktisk, god, i "Aktuel Naturvidenskab", nr. 3, 2006, s. 30-33.

*Artiklen handler om matematikkens forhold til naturen. Hvordan kan en rent intellektuel lænestolsdisciplin bruges til at beskrive fænomener ude i virkeligheden? I artiklen berøres platonisme, formalisme, aksiomer og matematikerens brug af sanseerfaring og metaforer. Kan bruges som materiale til elever.*

Johansen, M., (2006), "Helt Sikker", artikel i Weekendavisen 11.08.2006

*Letforståelig artikel om matematikkens tvivlsomme sikkerhed og bevisers rolle i matematikken. Berører Fermats sidste sætning, firfarvesætningen samt brugen af computere i beviser. Kan bruges som materiale til elever.*

Lakatos, I., (1976), "Proofs and Refutations", Cambridge: Cambridge University Press, London/New York

Eller uddrag på dansk: <http://www.henrikkragh.dk/hom/lmfk2002/lakatos2002.larger.pdf>  
*Arbejdet med beviset for Eulers polyedersætning sætningen udspiller sig som en dialog mellem elever og lærer. Elever og lærer fremsætter beviser og gendrivelsers og Lakatos forsøger hermed at introducere fallibilisme og illustrere bevisers dialektiske karakter. Uddrag af den danske version kan bruges som materiale til elever.*

Lakoff, G. Og Núñez, R., (2000), "Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being", New York: Basic Books.

*Bogen handler bl.a. om matematikkens metaforer. Kan bruges som lærerlitteratur.*

Lützen, J., (2005), Matematikkens og Rummet's Natur, i "Aktuel Naturvidenskab" nr. 5, 2005, s. 28-31

*Artiklen handler om forholdet mellem matematikken og naturen, og specielt matematiske geometrier og geometrier der beskriver virkeligheden. I artiklen berøres parallelpostulatet, ikke-euklidisk geometri og matematikkens grundlag (formalisme). Kan bruges som materiale til elever i 3g.*

Mejlbo, L. (1989), "De første grunde af matematikkens filosofi", Århus Universitet, Elementærafdelingen nr 23.

Niss, M. (red), (2001), "Matematikken og Verden", Fremad 2001

Niss, M. & Jensen, T. H., (2002), "Kompetencer og matematiklæring. Ideer til udvikling af matematikundervisning", (KOM-projektet), København: Undervisningsministeriets Forlag.

*Bogen er et forsøg på at inddrage kompetencer i beskrivelsen af matematik i stedet for kun fagligt stof (pensum). Matematisk modellering nævnes som én af de otte matematiske kompetencer, der dækker hvad det vil sige at være god til matematik. Skrevet til lærere.*

Shapiro, S., (2000), "Thinking about Mathematics", Oxford University Press.

Skovsmose, O., (1990), *Ud over matematikken*, Systime.

*Lettilgængelige bog på dansk om de forskellige retninger inden for matematikkens filosofi. Udmærket til disse problemstillinger. Uddrag kan bruges som materiale til elever.*

#### 4. Matematikkens grundlag

---

Davis, P. og Hersh, R., (1981), "The Mathematical Experience", Boston: Birkhäuser.

*Grundig beskrivelse af hvad matematik er. I kap 7 beskrives forskellige retninger inden for matematikken, herunder platonisme, formalisme og konstruktivisme. Matematikeres forgæves søgen efter et sikkert grundlag for matematikken beskrives og Lakatos' fallibilistiske tilgang forklares. Computerbeviser og firfarvesætningen beskrives i kap 8. God bog om matematikkens filosofi, men kun til lærere.*

Hersh, R., (1979), Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics, s. 31-50 i "Advances in Mathematics" Vol 31, 1979.

*Artiklen belyser skismaet mellem opfattelsen af matematik som en endegyldig sandhed, der udspringer af de tre grundlagsskoler, og opfattelsen af matematik som falsificerbar og i konstant udvikling som følge af menneskelig aktivitet. Kan bruges som baggrundslitteratur for lærere.*

Johansen, M., (2008), Den sidste skildpadde – ZFC har fødselsdag, i "Aktuel Naturvidenskab", nr. 1, 2008, s. 16-19.

*Artiklen handler om matematikkens grundlag, herunder de tre grundlagsskoler samt Zermelo og Fraenkels aksiomssystem, ZFC. I artiklen argumenteres for hvorfor matematik ikke kan opfattes som en absolut objektiv og sikker viden. Kan bruges som materiale til elever.*

Lützen, J., (2005), Matematikkens og Rummet's Natur, i "Aktuel Naturvidenskab" nr. 5, 2005, s. 28-31

*Artiklen handler om forholdet mellem matematikken og naturen, og specielt matematiske geometrier og geometrier der beskriver virkeligheden. I artiklen berøres parallelpostulatet, ikke-euklidisk geometri og matematikkens grundlag (formalisme). Kan bruges som materiale til elever i 3g.*

Madsen, S. (1992), Oprør fra den udelukkede midte, i "Udsagn – en mosaik om matematik", Matematiklærerforeningen.

*Letforståelig artikel om Brouwer (der repræsenterer intuitionismen) og det udelukkede tredje princip - non tertium datur. Kan bruges som materiale til elever.*

Skovsmose, O., (1990), *Ud over matematikken*, Systime.

*Lettilgængelige bog på dansk om de forskellige retninger inden for matematikkens filosofi. Udmærket til disse problemstillinger. Kan bruges som materiale til elever.*

Snapper, E., (1979), "The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism", s. 207-216 i Mathematics Magazine Vol. 52

<http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/393.pdf>

*Speciale fra RUC (2000) om Hilbert set i forhold til Kant og grundlagskrisen. Er temmelig vanskelig og ikke specielt brugbar i gymnasiets matematikundervisning. De første kapitler kan dog bruges af lærere til at få indsigt i hvad de tre grundlagsskoler står for. Artiklen beskriver de tre grundlagsskoler og deres mislykkedes forsøg på at give matematikken et sikkert grundlag. Kan bruges som lærerlitteratur.*

Artikel fra DSB's UD&SE (september 2007):

<http://www.dsb.dk/cs/BlobServer?blobtable=Download&blobheader=application%2Fpdf&blobcol=urldownload&blobkey=id&blobwhere=1148305217373&ssbinary=true&filename=file.pdf>

*Letforståelig artikel om Kurt Gödel og hvordan hans ufuldstændighedssætninger kuldastede Hilberts program. Kan bruges som materiale til elever.*

Artikel fra DSB's UD&SE (august 2007):

<http://www.dsb.dk/cs/BlobServer?blobtable=Download&blobheader=application%2Fpdf&blobcol=urldownload&blobkey=id&blobwhere=1148305170045&ssbinary=true&filename=file.pdf>

*Letforståelig artikel om Bertrand Russel og hans forsøg på at give matematikken et grundlag (logicisme), der ikke kunne føre til paradokser. Kan bruges som materiale til elever.*

## **5. Eksempler på AT-forløb med matematik**

---

Matematiklærerforeningens rapport "Matematik i AT" fra 2007:

<http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/at/mat-i-AT.doc>

*10 gode eksempler på AT-forløb, hvor matematik indgår. Forløbene er inddelt i forskellige niveauer og har fokus på forskellige aspekter af matematikken og dens metoder.*