

Vejledning til bedømmelse af eksamensopgaver i matematik

I *Læreplanen for Matematik stx-A og Matematik stx-B* er der i afsnit 4.3 angivet en række bedømmeskriterier, som alle lægges til grund for vurderingen af i hvilken grad eksaminandens besvarelse af opgaverne lever op til de faglige mål nævnt i afsnit 2.1. I forordet til hæfterne med vejledende og stillede eksamensopgaver har fagkonsulent Bjørn Grøn udvalgt en del af disse kriterier, som bør tages i betragtning i forbindelse med bedømmelse af skriftlige eksamensbesvarelser, nemlig:

DER LÆGGES VÆGT PÅ, OM EKSAMINANDEN:

1. **har grundlæggende matematiske færdigheder**, herunder
 - kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber
 - har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt
 - er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt
2. **kan anvende matematik på foreliggende problemer**, herunder
 - kan vælge hensigtsmæssige metoder til løsning af forelagte problemer
 - kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde
 - kan redegøre for foreliggende matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde
3. **har overblik over og kan perspektivere matematik**, herunder:
 - ...
 - kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling
 - ...

Endvidere er der i *Undervisningsvejledningen til Matematik stx-A og Matematik stx-B* afsnit 4.g samt i omslaget på de trykte eksamensopgaver, der udleveres til skriftlig eksamen, en liste over, hvad der vil blive lagt vægt på i bedømmelsen af besvarelsen af både de enkelte delspørgsmål og besvarelsen som helhed. Listen har vi i denne sammenhæng revideret og omformuleret til nedenstående 5 kategorier af kvalitative krav.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION og LAY-OUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE og DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Nedenfor giver vi vores bud på en fortolkning af indholdet i hver af de fem kategorier, hvor man bør holde sig for øje, at der kan være flere veje til en fuldt tilfredsstillende besvarelse, dvs. der vil ikke være krav om anvendelse af en bestemt metode, medmindre det eksplicit er beskrevet i opgaveformuleringen.

I hvert sæt er et antal point reserveret til en bedømmelse af helhedsindtrykket af opgavebesvarelsen. Som udgangspunkt opnår en elev fuldt pointtal i helhedsindtrykket, når besvarelsen er sammenhængende og velargumenteret. Men elevens særlig gode besvarelse af en enkelt opgave kan også spille en stor rolle i tildelingen af point for helhedsindtrykket. For eksempel kan elever, der demonstrerer særlig matematisk modenhed gennem metodevalg eller præcision i argumentation, og elever, der har en særlig indsigt ud over kernestoffet og forstår at udnytte den, belønnes i helhedsindtrykket.

Nedenstående skal ikke opfattes som en udtømmende liste over, hvad en besvarelse skal indeholde, men i stedet en liste over, hvilke kvaliteter i en besvarelse man bør lægge vægt på – både i den daglige undervisning og ved bedømmelse af eksamensopgaver.

TEKST:

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

Der ønskes ikke en ordret gengivelse af en lang opgavetekst, men eleven bør indlede besvarelsen med at præsentere relevante informationer fra opgaveteksten.

Resultater bør fremhæves fx med en forklarende tekst, der fortæller, hvad eleven har fundet frem til, ligesom eleven undervejs i en længere besvarelse bør fremhæve delresultater, således at elevens tankegang fremgår af besvarelsen.

NOTATION og LAY-OUT:

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

Vektorer, der er givet ved et koordinatsæt, kan angives både på lodret og vandret form, blot det af sammenhængen fremgår, at der er tale om en vektor og ikke et punkt. Koordinatsæt til punkter angives ikke på lodret form, men $P(2,3)$, $(2,3)$ og $P = (2,3)$ anses alle for korrekte skrivemåder.

I opgaveformuleringerne anvendes som standard decimalkomma, men decimalpunktum kan også forekomme, hvis decimalkommaet kan give anledning til misforståelser. Ved brug af værktøjsprogrammer anvendes ofte decimalpunktum i beregninger mv., hvilket også er tilstrækkeligt i elevens besvarelse, dog bør eleven tilføje manglende nul foran kommaet i fx .885, ligesom talangivelser, hvor E indgår, fx $3.1E-10$, skal skrives som $3,1 \cdot 10^{-3}$ eller som 0,0031.

Ved besvarelser af opgaver med hjælpemidler, hvor der indgår løsning af en ligning, skal ligningen altid opskrives først, hvorefter løsningsmetoden angives fx ved et udtryk, der viser værktøjsberegningen, eller ved en forklaring, der fortæller, hvilken programfacilitet man har brugt, dvs. fx $x^2 + 2x - 3 = 0$, solve($x^2 + 2x - 3 = 0, x$)(*), $x = -3 \vee x = 1$ eller $x = -3$, $x = 1$. "Maskinsproget" svarende til (*) hører ikke til almindelig matematisk notation og kan derfor ikke stå alene. Denne del af besvarelsen kan fx også erstattes af en kort forklaring på, hvilken facilitet i værktøjsprogrammet (fx "... jeg anvender solve..."), der anvendes. Ligeledes vil en elev, der i denne delprøve løser simple ligninger ved håndregning, opnå fuldt point med et par mellemregninger.

I besvarelser med hjælpemidler er det selve matematikken der skal være i fokus, ikke de tekniske kommandoer, dvs. de matematiske begreber skal benævnes korrekt og ikke med diverse "slang" i form af "maskinsprog", fx skal eleven skrive "Jeg løser ligningen..." og ikke "Jeg solver ligningen...". Tilsvarende bør eleven udnytte de matematiske symbolers til at skrive kort og præcist.

Eleven skal udtrykke sig præcist, dvs. anvende matematiske fagudtryk som "Fremskrivningsfaktoren er ... og vækstraten er derfor...", og benytte matematiske begreber korrekt i besvarelsens sammenhæng fx "Grafen for funktionen har en tangent i ..." og ikke "Funktionen har en tangent i ...".

I opgaver, hvor eleven selv skal indføre variable, skal der være en redegørelse for, hvad de valgte betegnelser står for. Desuden bør eleven inden for den enkelte opgave undgå at anvende samme bogstavbetegnelse for flere forskellige størrelser.

Eleven må gerne udskifte opgavetekstens variabelbetegnelser med betegnelser efter eget valg, når blot dette forklares. Det kan endda i nogle tilfælde være nødvendigt at indføre andre betegnelser end de opgivne. Fx er der en del matematikprogrammer, der ikke skelner mellem store og små bogstaver, hvorfor det fx i forbindelse med trekantsberegninger kan være nødvendigt at indfører nye betegnelser for at kunne skelne mellem en side a og en vinkel A i samme trekant. Tilsvarende vil det være nødvendigt i forbindelse med bestemmelse af en stamfunktion F til en funktion f , at eleven indfører en anden betegnelse for stamfunktionen. Flere programmer kan ikke håndtere symbolet $f'(x)$, hvorfor eleven også i den type opgaver skal gøre opmærksom på, at der af værktøjsmæssige grunde indføres en ny betegnelse for $f'(x)$.

REDEGØRELSE og DOKUMENTATION:

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

Overordnet set skal elevens besvarelse altid indeholde forklaringer og argumenter, der gør det let at forstå, hvad eleven har tænkt undervejs i løsningen af en opgave, dvs. et resultat skal underbygges af mellemregninger og/eller argumentation.

Ved beregninger af enhver art arbejdes der inden for mængden af reelle tal, og eleven skal derfor afvise eventuelle komplekse løsninger, der dukker op i værktøjsprogrammets løsning.

I opgaveformuleringer som fx 'Løs ligningen', 'Bestem nulpunkter' eller 'Beregn skæringspunkter mellem to grafer' er der ikke krav om anvendelse af en bestemt metode, men inddragelse af grafisk eller anden form for kontrol, hvor dette falder naturligt, kan tages i betragtning i forbindelse med tildeling af point for helhedsindtrykket. På samme måde kan et relevant og begrundet valg af løsningsstrategi demonstrere overblik og tælle positivt i helhedsindtrykket.

Trigonometriopgaver kan som altid løses ved traditionelle beregningsmetoder. Eleven kan også opnå fuldt point for opgaven, hvis eleven benytter et geometriprogram til at løse opgaven. Her skal eleven konstruere de relevante geometriske figurer efter korrekte konstruktionsprincipper, som beskrives nøje, og eleven kan derefter udnytte programmets faciliteter til at beregne ukendte størrelser, idet resultaterne angives med en passende nøjagtighed i hht. opgavens sammenhæng (fx 3 betydende cifre).

Ved ligningsløsning i hånden medtages mellemregninger i passende omfang, mens ligningsløsning med værktøjsprogram kræver en angivelse af, hvilken metode der er brugt til løsningen – ikke tastesekvenser.

Ved symbolsk ligningsløsning med hjælpemidler kan værktøjsprogrammet anvendes, og der kræves *ikke* argumentation for antallet af løsninger, medmindre det eksplicit fremgår af opgaveformuleringen. Hvis en ligning løses grafisk, skal det grafiske billede ledsages af en forklaring på den matematiske fremgangsmåde fx "Jeg tegner graferne i samme koordinatsystem (se figuren) og løser ligningen $f(x) = g(x)$ grafisk ved at

af læse førstekoordinaten til skæringspunkterne mellem graferne i grafvinduet ("Intersection").", og eleven skal her argumentere for antallet af løsninger pga. grafvinduet's begrænsninger. Eleven kan argumentere ud fra sit kendskab til simple funktioners grafiske forløb eller ud fra funktionernes monotoniegenskaber.

Ved bestemmelse af en bestemt variabelsammenhæng ved hjælp af regression skal eleven angive, hvilken regressionstype der anvendes. Alle opgivne datapunkter skal anvendes i regressionen, og det skal fremgå af besvarelsen, hvad der anvendes som uafhængig og afhængig variabel i relation til opgavetekstens sammenhæng.

Ved sammenligning af en modelberegnet værdi og en opgivne værdi skal kommentaren ledsages af beregninger fx i form af den relative eller den absolutte afvigelse.

Ved bestemmelse af monotoniforhold og ekstrema kan eleven i nogle tilfælde argumentere ud fra sit kendskab til simple funktioners grafiske forløb evt. kombineret med beregninger, hvor der anvendes numeriske eller grafiske faciliteter. Besvarelser af denne type skal indeholde en skitse af grafen. Der kan imidlertid altid argumenteres ud fra den afledede, dvs. ved løsning af ligningen $f'(x) = 0$ og en argumentation for monotoniiintervallerne enten ud fra fortegnsvariationen for $f'(x)$ eller ved henvisning til grafen for f . Monotoniiintervallerne skal angives; det er ikke nok med en fortegnslinje. Ved bestemmelse af maksimum eller minimum for en funktion defineret i et begrænset interval er det dog tilstrækkeligt at bestemme dette ved brug af værktøjsprogrammet.

Bestemmelse af væksthastighed i et givet punkt kræver en bestemmelse af differentialkvotienten (grafisk eller symbolsk beregning) efterfulgt af et svar skrevet i almindeligt sprog, hvor eventuelle enheder er angivet.

Ved beregning af bestemte integraler skal integralet altid opskrives symbolsk med de korrekte grænser – uanset beregningsmetode (grafisk eller symbolsk). Ved arealbestemmelse med integraler, hvor grænserne ikke er angivet i opgaven, skal disse beregnes separat.

I modelopgaver, hvor eleven bliver bedt om at løse en differentiaalligning, vil der kun optræde differentiaalligninger, som kan omskrives til en af de typer, der er nævnt i kernestoffet. Eleven kan således frit vælge mellem at løse differentiaalligningen direkte med værktøjsprogrammet eller med en kendt løsningsformel. Som ved andre typer af ligninger skal differentiaalligningen (evt. med begyndelsesbetingelse afhængigt af opgavens indhold) altid angives i besvarelsen, før ligningen løses, og værktøjsprogrammets kommando angives eller forklares.

I vektorregning bør eleven forklare, hvilke matematiske begreber der er i spil, når der anvendes en indbygget facilitet i værktøjsprogrammet fx "Normalvektoren for planen udregnes ved hjælp af krydsproduktet for vektor \vec{a} og \vec{b} : ...", hvorefter løsningsmetoden angives ved et udtryk, der viser værktøjsprogrammets kommando.

I opgaver, der handler om deskriptiv statistik, skal eleven argumentere ud fra statistiske deskriptorer og statistiske begreber.

FIGURER:

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

Når der i opgaveformuleringen bruges ord som 'skitser' og 'tegn', så er det ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde; kravene er de samme. En skitse af et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation skal vise de karakteristiske egenskaber eller fænomener, som er væsentlige for opgavens besvarelse. Eksempelvis tegnes spidse vinkler som spidse, og modeller af trekanter tegnes ikke som retvinklede, hvis dette ikke fremgår af oplysningerne. For et grafisk forløb kan skæringspunkter med akserne, beliggenhed af lokale ekstrema, monotoniforhold eller asymptotisk forløb hver for sig være væsentlige at tage med i en skitse, alt afhængig af opgaven. I statistiske illustrationer skal de væsentlige statistiske deskriptorer vises korrekt.

Eleven kan vælge at tegne grafer for funktioner, plotte datapunkter med regressionsmodel etc. og fx henvise til disse i konklusioner og kontrol af resultater, men det er ikke et krav, medmindre det eksplicit fremgår af opgaveformuleringen. I geometriopgaver forholder det sig på samme måde, men det kan være nødvendigt, at eleven tegner relevante skitser, for at man kan følge elevens tankegang.

Når eleven anvender figurer, så skal der være overensstemmelse mellem betegnelserne på tegningerne og i beregningerne.

Når eleven i opgaveformuleringen eksplicit bliver bedt om at tegne grafen, så skal grafen tegnes i et interval, der gør, at alle væsentlige træk ved funktionen vises. Eleven bør markere akseinddelingen, og tilsvarende bør grafiske aflæsninger markeres på figuren fx med stiplede linjer eller punkter, hvor koordinatsættet er angivet.

Ved grafisk bestemmelse af arealer af punktmængder skal grafen vises, således at det klart fremgår, hvilke grænser der er benyttet (evt. en skravering af punktmængden).

KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Resultater skal angives med korrekt notation og symbolbrug og kan fx fremhæves ved en markering i form af fx fed skrift eller to streger under. Eleven bør overveje, om resultatet skal angives eksakt eller som en tilnærmet værdi.

I opgaver, der omhandler en virkelighedsnær situation beskrevet ved en model, skal eleven besvare spørgsmålene ved beregninger efterfulgt af en konklusion formuleret i hht. opgavens kontekst i hele sætninger i almindeligt sprog. Resultaterne bør angives med korrekte enheder og med antal betydende cifre afpasset efter modellen.