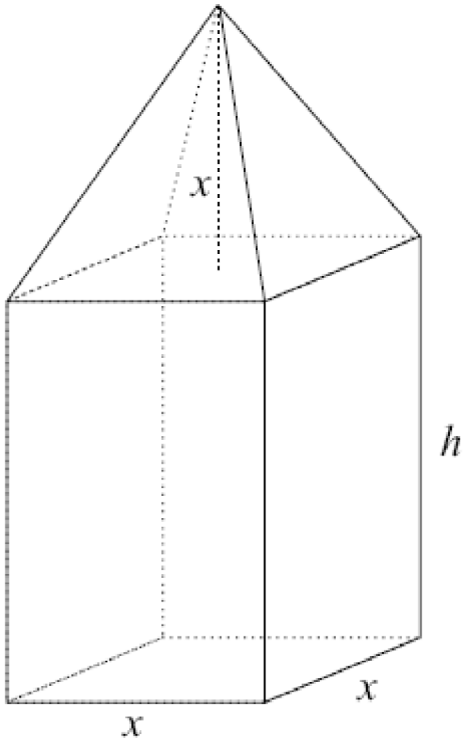
STX081-MAA_Opgave_17a_Variabelsammenhæng_optimering_TII

En bestemt type af beholdere har form som vist på figuren.



For en beholder af denne type, hvor rumfanget skal være 100 cm^3, gælder, at

$$\frac{1}{3}\cdot x^3 + h\cdot x^2 = 100$$

$$S(x) := \left(1+\sqrt{5}\right)\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot h \mid x > 0$$

hvor S er beholderens overflade (målt i cm^2), og hvor h (målt i cm) og x (målt i cm) er angivet på figuren.

a) Bestem S udtrykt ved x, og bestem x, så beholderens overfladeareal bliver mindst mulig.

Rumfanget af beholderen er lig med 100 cm^3 :

Jeg vil have beholderens overflade S udtrykt ved x dvs. x skal være min uafhænguge variabel, så jeg benytter den ovenstående ligning til at isolere h således at denne altså bliver udtrykt ved x:

$$\frac{1}{3}\cdot x^3 + h\cdot x^2 = 100$$

$$\text{solve}\left(\frac{1}{3}\cdot x^3 + h\cdot x^2 = 100,\ h\right) \mid x > 0 \text{ and } h > 0 \Rightarrow h = \frac{-\left(x^3 - 300\right)}{3\cdot x^2}$$

h udtrykt ved *x* er altså $h = \frac{-\left(x^3 - 300\right)}{3 \cdot x^2}$.

Jeg erstatter hermed *h* i udtrykket for overfladearealet *S* :

$S(x) := \left(1 + \sqrt{5}\right) \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot h \mid x > 0$

$S(x) := \left(1 + \sqrt{5}\right) \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot \left(\frac{-\left(x^3 - 300\right)}{3 \cdot x^2} \right) \mid x > 0$

Konklusion: Således er *S* udtrykt ved *x* alene: $s(x) = \frac{\left(3\sqrt{5} - 1\right) \cdot x^3 + 1200}{3 \cdot x}$

Nu skal jeg bestemme x så beholderens overfladeareal bliver mindst mulig.

Funktionen $S(x)$ differentieres: $\mathrm{df}(x) := \frac{d}{dx}\left(s(x)\right)$. Den afledede funktion er altså:

$\mathrm{df}(x) = \frac{2 \cdot \left(\left(3\sqrt{5} - 1\right) \cdot x^3 - 600\right)}{3 \cdot x^2}$

Der hvor den afledede funktion har nulpunkt, kan funktionen have ekstrema. Dvs. ved at løse ligningen $\mathrm{df}(x) = 0$, fås *x*-værdierne for funktionens ekstrema. Vi løser ligningen:

$\mathrm{solve}\left(\mathrm{df}(x) = 0, x\right) \Rightarrow x = 4.71937$

Ekstremum ligger altså i $x = 4.71$, og der er altså kun et ekstremum. Dette bør være et minimum, men for en sikkerheds skyld tjekker jeg efter.

Jeg undersøger altså om det er hhv. et minimum, maximum eller en vendetangent. Dette gøres ved at vælge en *x*-værdi der er mindre end $x = 4.71$ og en *x*-værdi der er større end $x = 4.71$, og indsætte dem i den afledede funktion(differentialkvotienten).

x-værdi mindre end $x = 4.71$:

$\mathrm{df}(2) = -92.3891$

$f'(x)$ er negativ, dvs. $f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty, 4.71]$.

x-værdi større end $x = 4.71$:

$df(6) = 11.7217$

$f'(x)$ er positiv, dvs. $f(x)$ er voksende i intervallet $[4.71,\infty[$

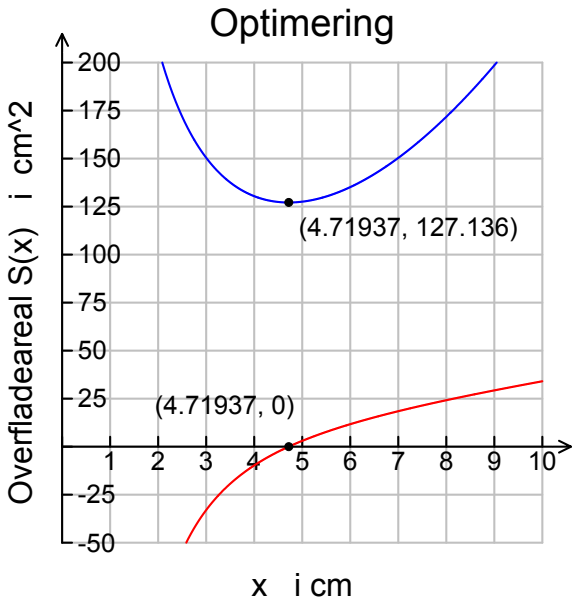
Da funktionen er aftagende før, og voksende efter $x = 4.71$ er det altså et minimum.

Funktionens minimum beregnes: $S(4.71937) = 127.136$

Der er altså minimum i punktet (4.72 , 127.14).

Konklusion: Overfladearealet er mindst mulig når $x = 4.71$ cm.

Jeg tegner grafen for funktionen samt den afledede funktion. Grafisk bestemmer jeg nu funktionens ekstrema og differentialkvotients nulpunkt vha. "Calculate minimum" og "Calculate Zero"-faciliteterne i programmets grafvindue.



Som det ses stemmer det grafiske billede overens med de symbolske beregninger, idet der er fundet et minimum i (4.71 , 127.136).